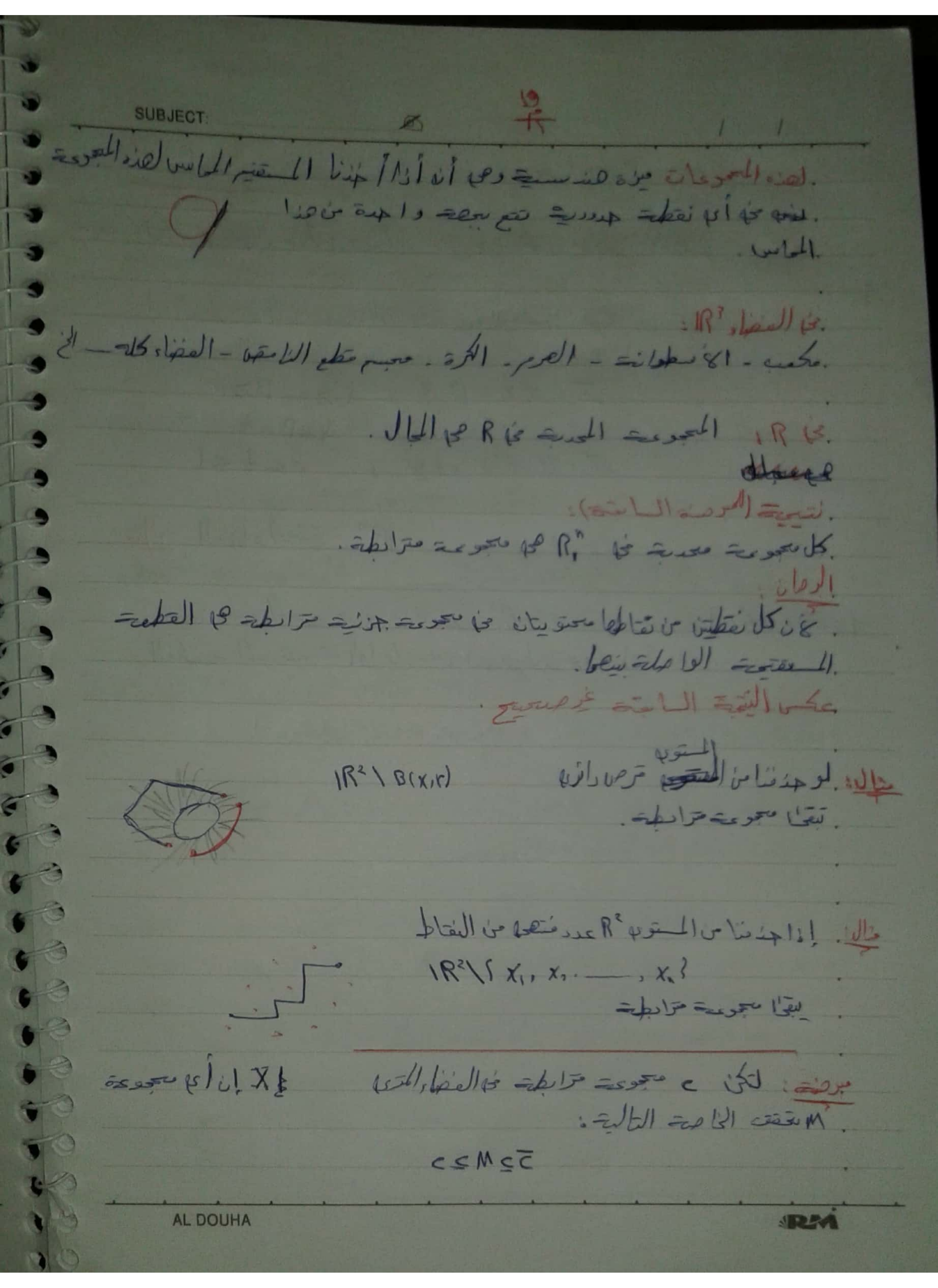


لهذه المجموعات ميزة هندسية وهي أنه إذا أخذنا المستقيم المماس لهذه المجموعة لمنحنيها أي نقطة حدودية تقع بجهة واحدة من هذا المماس.

في الفضاء $\mathbb{R}^3$:

مكعب - الاسطوانة - الهرم - الكرة - مجسم قطع الناقص - الفضاء كله ـــ الخ

في $\mathbb{R}$، المجموعة المحدبة في $\mathbb{R}$ هي المجال.

نتيجة (المبرهنة السابقة):

كل مجموعة محدبة في $\mathbb{R}^n$ هي مجموعة مترابطة.

البرهان:

لأن كل نقطتين من نقاطها محتويتان في مجموعة جزئية مترابطة هي القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

عكس النتيجة السابقة غير صحيح.

مثال: لو حذفنا من المستوي قرص دائري $\mathbb{R}^2 \setminus B(x,r)$ تبقى مجموعة مترابطة.

مثال: إذا حذفنا من المستوي $\mathbb{R}^2$ عدد منتهي من النقاط $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ يبقى مجموعة مترابطة

مبرهنة: لتكن C مجموعة مترابطة في الفضاء المتري X، إن أي مجموعة M تحقق الخاصة التالية:

$$C \subseteq M \subseteq \bar{C}$$

تكون أيضاً مترابطة.

البرهان: (نقض الفرض)

لنفرض جدلاً أن المجموعة M غير المترابطة هذا يعني أن لها تقسيم أي توجد مجموعتان مفتوحتان A, B بحيث

$A \cap M \neq \phi$

$B \cap M \neq \phi$

$A \cap B \cap M = \phi$

$A \cup B \supseteq M$

بما أن $A \cap M \neq \phi$ إذاً توجد نقطة 8 مرقة في المجموعة c مثل $y \in A \cap M$ تنتمي إلى A إن A مجموعة مفتوحة وتحوي y إذاً هي جوار لها وبما أن y نقطة 8 مرقة بـ c فإن أي جوار لها يتقاطع مع c أي أن $A \cap c \neq \phi$ وبطريقة نفسها نثبت أن $B \cap c \neq \phi$ وهذا يؤدي إلى أن المجموعتين $A \cap c$, $B \cap c$ تشكلان تقسيماً للمجموعة c (لأنهما مفتوحتان في المجموعة c وغير خاليتان وغير متقاطعتان واجتماعهما يساوي c) وهذا يؤدي c غير مترابطة مما ينافي الفرض.

⇐ الفرض الجدلي خاطئ والمجموعة M مترابطة.

مثال: لو أخذنا في R

$c =]a, b[$

a ——— b

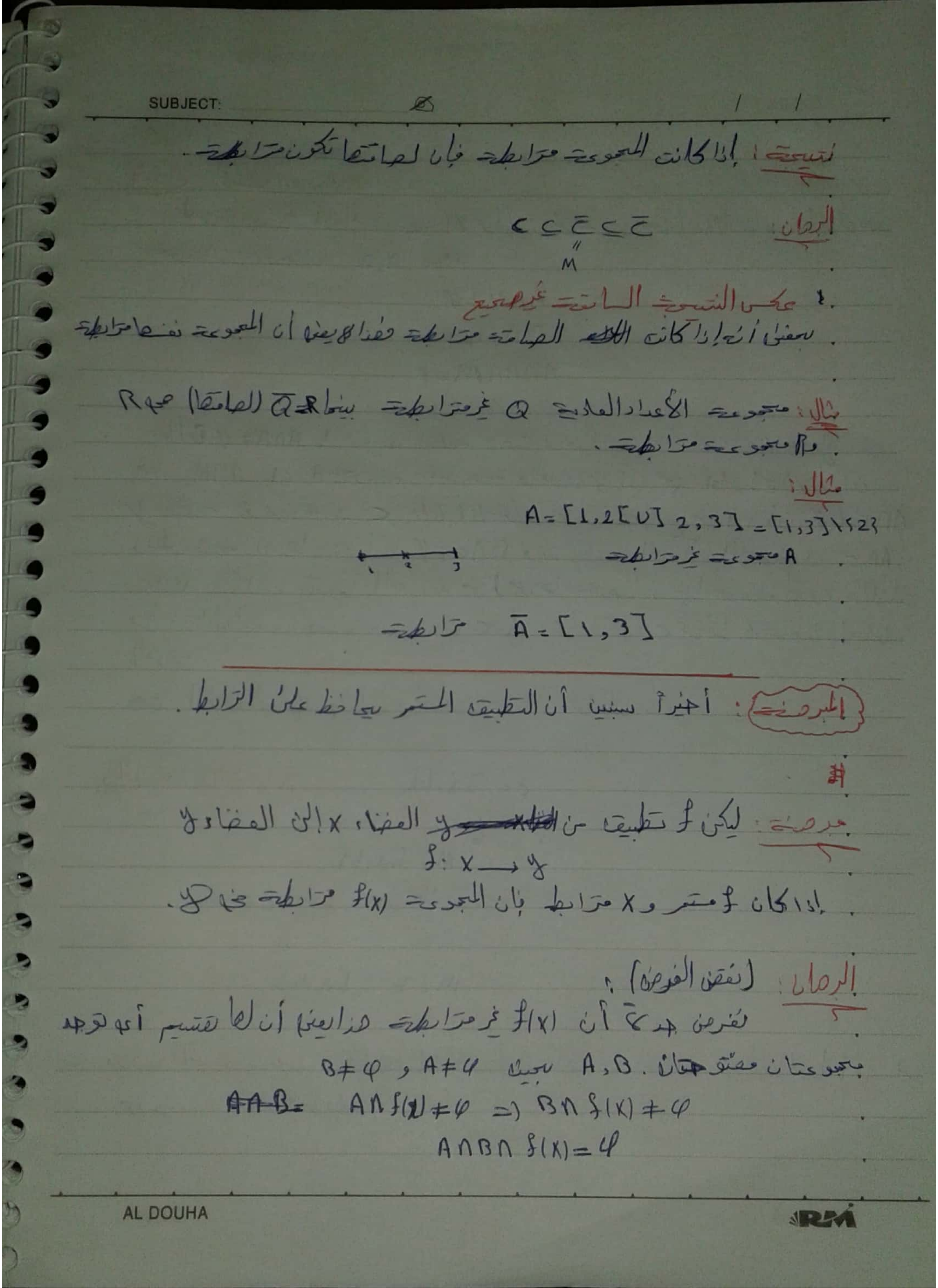
$M = [a, b[$

تحوي c ومحتواة في اللاصاقة

أو

$M = \bar{c} = [a, b]$

ملخص المبرهنة بشكل بسيط: إذا كان لدينا مجموعة مترابطة وأضفنا لها أي جزء من حدودها تبقى مترابطة.



نتيجة: إذا كانت المجموعة مترابطة فإن لصاقتها تكون مترابطة.

البرهان: $C \subseteq \bar{C} \subseteq \bar{C}$

M

٤. عكس النتيجة السابقة غير صحيح
بمعنى أنه إذا كانت ~~الـ~~ اللصاقة مترابطة فهذا لا يعني أن المجموعة نفسها مترابطة

مثال: مجموعة الأعداد العادية Q غير مترابطة بينما $\bar{Q} = R$ (لصاقتها) هو R
و R مجموعة مترابطة.

مثال:

$A = [1,2[\cup]2,3] = [1,3] \setminus \{2\}$

A مجموعة غير مترابطة

$\bar{A} = [1,3]$ مترابطة

المبرهنة: أخيراً سنبين أن التطبيق المستمر يحافظ على الترابط.

مبرهنة: ليكن f تطبيق من ~~الفضاء~~ الفضاء X إلى الفضاء Y

$f: X \to Y$

إذا كان f مستمر و X مترابط فإن المجموعة $f(X)$ مترابطة في Y.

البرهان: (نقض الفرض):
نفرض جدلاً أن $f(X)$ غير مترابطة هذا يعني أن لها تقسيم أي توجد مجموعتان مفتوحتان A, B بحيث $A \neq \varphi$ و $B \neq \varphi$

~~$A \cap B =$~~ $A \cap f(X) \neq \varphi \Rightarrow B \cap f(X) \neq \varphi$

$A \cap B \cap f(X) = \varphi$

SUBJECT:

$A \cup B \supseteq f(X)$

كون التطبيق مستمر فإن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة و كذلك

$f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ مفتوحتان في X.

وهما غير خاليتين لأن A, B غير خاليتين وهما غير متقاطعتين لأن A, B غير متقاطعتين في $f(X)$.

واجتماعهما يحوي X

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(f(X))$$

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \supseteq X$$

أي أن المجموعتين $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ تفصلان الفضاء X مما يجعله غير مترابط وهذا تناقض لأن X بالفرض [illegible]. وبالتالي $f(X)$ مترابطة